UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-LORRAINE

Rapports de Recherche

1992

25ème anniversaire

N° 1805

Programme 6

Calcul Scientifique, Modélisation et Logiciels numériques

STABILISATION D'UN BRAS ROBOT FLEXIBLE EN TORSION

Mohammad CHERKAOUI
Francis CONRAD

Décembre 1992

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Stabilisation d'un bras robot flexible en torsion

Mohammad CHERKAOUI (*), Francis CONRAD (*)

Résumé .

On étudie la stabilisation d'un bras robot flexible en torsion, contrôlé en boucle fermée à l'une de ses extrémités. Le mouvement du bras est modélisé par une équation aux dérivées partielles de type ondes. La condition aux limites prend en compte l'état du système à la fois à l'intérieur du bras et à son extrémité. Il s'agit donc d'un feedback frontière où interviennent des termes distribués.

Stabilization of a flexible arm

Abstract .

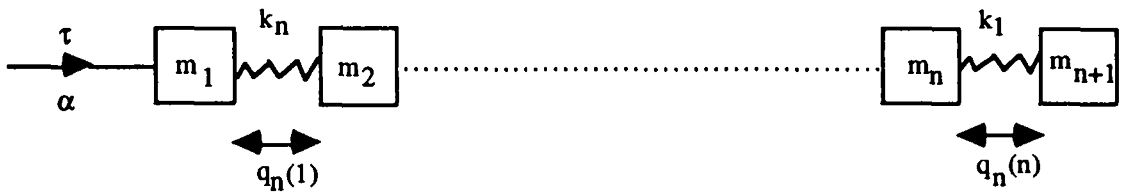
We study the stabilization of a flexible arm, by means of feedback control applied at one end.The model is a one dimensional wave equation. The boundary condition at the controlled end takes into account the state of the system, in the interior of the arm as well as at the boundary. In other words distributed terms occur in the boundary feedback.

(*) Université de Nancy I, URA-CNRS 0750 et Projet NUMATH, INRIA - Lorraine
BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France.

PREMIERE PARTIE

I - Introduction

Dans un travail antérieur [6], S. ICART, J. LEBLOND et C. SAMSON ont étudié une approximation d'un bras flexible en torsion par un système constitué d'une succession de n ressorts de raideurs $k_n, \ldots, k_1$, séparés par (n + 1) masses $m_1, \ldots, m_{n+1}$



Quand le contrôle est appliqué à la première masse et que la gravité est négligée, le principe fondamental de la dynamique conduit aux équations suivantes :

$$\text{(I.1)} \qquad M_{n+1}\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $K_n = \begin{pmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}$, α représente le mode rigide, le vecteur q_n de $\mathbb{R}^n$ représente les angles des déformations relatives, τ est le contrôle. Chaque élément de la matrice M_n est défini par

$$M_n(i,j) = \sum_{\ell=1}^{\inf(n+1-i,\, n+1-j)} m_\ell .$$

Notons $M_n(1)$ la première colonne de M_n et $M_n(1,1)$ le premier élément de $M_n(1)$. Alors

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n+1} m_i & M_n(1)^T \\ M_n(1) & M_n \end{pmatrix}$$

et (I.1) implique

$$\text{(I.2)} \qquad \left(M_n - \frac{M_n(1)\, M_n(1)^T}{M_{n+1}(1,1)}\right)\ddot{q}_n + K_n q_n = -\frac{M_n(1)}{M_{n+1}(1,1)}\,\tau(t).$$

Pour les détails du calcul voir [6].

Lorsque $\tau = 0$, l'équation (I.2) caractérise les vibrations libres du système (I.1) :

(I.2)' $$\left(M_n - \frac{M_n(1)\,M_n(1)^T}{M_{n+1}\,(1,1)}\right)\ddot{q}_n + K_n q_n = 0.$$

Soient $(\phi_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs propres du système (I.2)'.
Soient $k_p, k_v > 0$ et $G_n \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(G_n^T \,.\, \phi_i)\, \phi_i(1) \geq 0,\ 1 \leq i \leq n$.

Alors la loi de contrôle

(I.3) $$\tau(t) = -\,k_p\left(\alpha(t) - G_n^T\, q_n(t)\right) - k_v\left(\dot{\alpha}(t) - G_n^T\, \dot{q}_n(t)\right)$$

stabilise exponentiellement le système (I.1) (cf. [6]).

L'objet de ce travail est de compléter l'étude faite dans [6] pour le modèle continu. Pour ce cas, un certain nombre de résultats ou de conjectures avaient été énoncés dans [6]. Nous proposons ici une étude mathématique assez exhaustive du modèle continu du point de vue existence et stabilité (forte ou uniforme).

Rappelons [6] que le bras flexible en torsion, de longueur unité, de masse et raideur constantes, contrôlé à l'une de ses extrémités, peut être modélisé comme suit :

(I.4) $$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0, & x \in\ ]0,1[,\ t \geq 0 \\ y_x(0,t) = -\,\tau(t) \\ y_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

avec $(y(x,0)\,,\, y_t(x,0)\,) = (y_0(x)\,,\, y_1(x))$.

Dans (I.4), $y(x,t)$ représente l'angle de torsion par rapport à l'origine au point d'abscisse x de la barre et à l'instant t.

On considère une loi de contrôle $\tau(t)$ de la forme

(I.5) $$\tau(t) = -k_p\,[\,y(0,t) - \int_0^1 k(x)\, y_x(x,t)\,dx] \;-\; k_v\,[y_t(0,t) - \int_0^1 k(x)\, y_{xt}(x,t)\,dx]$$

qui étend (I.3) au cas continu.

Par intégration par parties dans (I.5), avec $k(1) = 0$, $1+ k(0) > 0$, et $k_x \in L^2(0,1)$, on peut écrire (I.5) sous la forme

(I.6) $$-\,\tau(t) = k_p\, y(0,t) + \int_0^1 G(x)\, y(x,t)\,dx + k_v\, y_t\,(0,t) + \frac{k_v}{k_p}\int_0^1 G(x)\, y_t(x,t)\,dx,$$

avec $k_p, k_v > 0$, et $G \in L^2(0,1)$.

Ce rapport comporte deux parties.

La première partie est organisée de la façon suivante:

Dans la section II, on établit l'existence d'une solution au système bouclé (I.4) - (I.6). Pour cela, on introduit une nouvelle norme sur l'espace naturel d'énergie, équivalente à la norme usuelle, qui permet d'associer au système (I.4) - (I.6) un semi-groupe dissipatif.

Dans la section III, on établit la stabilité asymptotique du système, modulo l'introduction d'une fonction de Lyapunov adéquate et l'utilisation du principe d'invariance. La condition requise pour avoir ce résultat est plus faible que celle de [6] (y compris dans le cas "discret").

La section IV est consacrée à l'étude de la stabilité uniforme, sous des hypothèses un peu plus fortes sur le noyau G intervenant dans la loi de contrôle (I.6).

Les résultats ci-dessus s'étendent, sous les mêmes conditions, au cas d'un bras robot avec masse et raideur variables. Ceci fait l'objet d'une annexe.

Enfin, dans une deuxième partie on étudie le modèle du bras flexible avec un feedback où la partie distribuée ne fait intervenir que la position (et non la vitesse). Avec ce modèle simplifié, des techniques plus explicites conduisent à des résultats similaires.

II - Résultat d'existence

II - 1. Définition d'une nouvelle norme sur $E = H^1(0,1) \times L^2(0,1)$.

Soient $\varphi_p(x) = \sqrt{2}\cos(\omega_p x)$ pour $p \geq 1$, $\varphi_0(x) = 1$, les solutions normalisées du système

$$\begin{cases} -\varphi_{p_{xx}} = \lambda_p \varphi_p \\ \varphi_{p_x}(0) = \varphi_{p_x}(1) = 0, \end{cases}$$

où $\lambda_p = \omega_p^2$, $\omega_p = p\pi$, $\omega_p^2 = \| \varphi_{p_x} \|^2_{L^2(0,1)}$.

Les $(\varphi_p)_{p \geq 0}$ forment une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$.

On définit ensuite une forme bilinéaire symétrique B sur E.

Pour tout $U_1 = \binom{u_1}{v_1}$, $U_2 = \binom{u_2}{v_2} \in E$,

$$B(U_1, U_2) = \frac{k_v}{k_p} \left[k_p u_1(0) + (G, u_1)_{L^2(0,1)} \right] \left[k_p u_2(0) + (G, u_2)_{L^2(0,1)} \right] + \sum_{p=0}^{+\infty} (k_v + d_p)\, B_p(U_1, U_2),$$

avec $d_p = \dfrac{k_v}{k_p} \dfrac{(G, \varphi_p)_{L^2(0,1)}}{\varphi_p(0)}$,

et $$B_p(U_1, U_2) = \begin{cases} (\varphi_p, v_1)(\varphi_p, v_2) + \dfrac{1}{\omega_p^2}(\varphi_{p_x}, u_{1_x})(\varphi_{p_x}, u_{2_x}), & \text{pour } p \geq 1 \\ (\varphi_0, v_1)(\varphi_0, v_2), & \text{pour } p = 0. \end{cases}$$

Proposition II.1. *On fait les hypothèses suivantes : $k_p, k_v > 0$, et pour tout $p \geq 0$, $k_v + d_p > 0$. Alors la forme bilinéaire B est un produit scalaire sur E, et la norme associée est équivalente à la norme usuelle de E .*

Lemme II.1. *Il existe $C > 0$ telle que pour tout u dans $H^1(0,1)$, on a*

$$u^2(0) + \int_0^1 u_x^2\, dx \leq C\left(\left[k_p u(0) + (G, u)_{L^2(0,1)}\right]^2 + \int_0^1 u_x^2\, dx \right).$$

Preuve du lemme II.1.

On raisonne par l'absurde, en supposant que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in H^1(0,1)$ tel que

$$u_n^2(0) + \int_0^1 u_{n_x}^2\, dx \geq n\left(\left[k_p u_n(0) + (G, u_n)_{L^2(0,1)}\right]^2 + \int_0^1 u_{n_x}^2\, dx \right).$$

On peut évidemment supposer $u_n \neq 0$, et normalisée dans $H^1(0,1)$. Donc il existe $u_n \in H^1(0,1)$ vérifiant

$$u_n^2(0) + \int_0^1 u_{n_x}^2\,dx = \| u_n \|^2_{H^1(0,1)} = 1$$

$$(k_p\, u_n(0) + (G, u_n)_{L^2(0,1)})^2 + \int_0^1 u_{n_x}^2\,dx \to 0.$$

On aura par conséquent

$$\| u_n \|^2_{H^1(0,1)} = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$\int_0^1 u_{n_x}^2\,dx \to 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$k_p u_n(0) + (G, u_n)_{L^2(0,1)} \to 0 \qquad \text{(iii)}$$

(i) implique que u_n converge vers u dans $H^1(0,1)$-faible, et dans $L^2(0,1)$-fort .

L'injection de $H^1(0,1)$ dans $C^\circ([0,1])$ étant compacte, on a $u_n(0) \to u(0)$.

(ii) implique que $u_{n_x} \to 0$ dans $L^2(0,1)$ - fort, et comme $u_{n_x} \to u_x$ au sens des distributions, on en déduit $u_x = 0$, et par suite u est constante.

(iii) donne alors $k_p\, u(0) + (G, u)_{L^2(0,1)} = 0$, qui s'écrit, vu que $u = (u, \varphi_0)\,\varphi_0$,

$(k_v + d_0)\, u(0) = 0$; or $k_v + d_0 > 0$, d'où $u(0) = 0$.

Mais alors

$$1 = u_n^2(0) + \int_0^1 u_{n_x}^2\,dx \to u^2(0) + 0 = 0,$$

ce qui est absurde, d'où le lemme II.1.

<u>Preuve de la proposition II.1</u>.

a) Montrons que B est définie positive sur E.

Soit $U = \binom{u}{v}$. Alors $B(U, U) = 0 \Rightarrow$

i) $\quad B_p(U, U) = 0, \forall\, p \geq 0$

$$\Rightarrow (\varphi_p, v)^2 + \frac{1}{\omega_p^2} (\varphi_{p_x}, u_x)^2 = 0, \forall\, p \geq 1, \text{ et } (\varphi_0, v)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\varphi_p, v)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall\, p \geq 0 \Rightarrow v = 0$$

(car $(\varphi_p)_{p\geq 0}$ est une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$).

On a aussi $(\varphi_{p_x}, u_x) = 0$ $\forall\, p \geq 1$, et une intégration par parties implique que $(\varphi_p, u) = 0 \quad \forall\, p \geq 1$, soit $u = (\varphi_0, u)\, \varphi_0$, avec $\varphi_0 = 1$, et $u(0) = (\varphi_0, u)$.

ii) $\quad k_p\, u(0) + (G, u) = 0 \ \Rightarrow u(0) = 0 = (u, \varphi_0)$.

Ainsi $(u, \varphi_p)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall\, p \geq 0 \Rightarrow u = 0$.

Donc la forme bilinéaire symétrique B est définie positive, par conséquent c'est un produit scalaire sur E.

b) Montrons que la norme associée au produit scalaire B est équivalente à la norme usuelle de E .

On a évidemment , avec $U = (u,v)$

$$B(U, U) = \frac{k_v}{k_p} \left[k_p\, u(0) + (G, u)_{L^2}\right]^2 + \sum_{p=0}^{+\infty} (k_v + d_p)\, B_p(U, U)$$

$$\leq C' \, \| (u, v) \|_E^2$$

où C' est constante, car d_p est borné uniformément par rapport à p.

D'autre part, soit

$$\| (u, v) \|_E^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_x^2 + v^2)\, dx + \frac{k_p}{2} u^2(0).$$

$$\text{L'inégalité } \frac{1}{2} \int_0^1 (v^2 + u_x^2)\, dx \leq \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} B_p(U, U),$$

le lemme II.1, et le fait que $k_v + d_p > 0$ uniformément en p, nous assurent l'inégalité

$$\| (u, v) \|_E^2 \leq C''\, B(U, U).$$

D'où l'équivalence des deux normes, ce qui achève la preuve de la proposition II.1.

II - 2. <u>Existence de la solution au système (I.4)-(I.6)</u> .

Rappelons les équations du système (I.4)-(I.6) étudié ici :

$$\text{(II.1)} \quad \begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0 & x \in \,]0,1[\;,\; t \geq 0 \\ y_x(0,t) = k_p\, y(0,t) + (G, y)_{L^2(0,1)} + k_v\, y_t(0,t) + \dfrac{k_v}{k_p} (G, y_t)_{L^2(0,1)} \\ y_x(1,t) = 0 \\ y(x,0) = y_0(x),\; y_t(x,0) = y_1(x). \end{cases}$$

On peut écrire le système (II.1) sous la forme opérationnelle suivante :

(II.2) $\qquad \binom{y}{z}_t + A\binom{y}{z} = 0,$

avec $z = y_t$, $(y(x,0), z(x,0)) = (y_0, y_1)$, et $A\binom{y}{z} = \binom{-z}{-\Delta y}$,

où $D(A) = \Big\{(y, z) \in H^2(0,1) \times H^1(0,1);\ y_x(1) = 0;$

$$y_x(0) = k_p\, y(0) + k_v\, z(0) + (G, y)_{L^2(0,1)} + \frac{k_v}{k_p}(G, z)_{L^2(0,1)}\Big\},$$

k_p, k_v étant des constantes strictement positives.

Théorème II.1. *L'opérateur linéaire A est maximal monotone. Pour toute condition initiale $(y_0, y_1) \in E$, le système (II.1) admet une solution faible unique*

$$y \in C\big([0, +\infty[, H^1(0,1)\big) \cap C^1\big([0,+\infty[, L^2(0,1)\big).$$

Si $(y_0, y_1) \in D(A)$, le système (II.1) admet une solution forte unique

$$y \in C^2\big([0,+\infty[, L^2(0,1)\big) \cap C^1\big([0, +\infty[, H^1(0,1)\big) \cap C\big([0, +\infty[, H^2(0,1)\big).$$

Démonstration.

i) Monotonie de l'opérateur linéaire A.

Soit $Y = \binom{y}{z} \in D(A)$, donc $AY = \binom{-z}{-\Delta y}$

$$B(AY, Y) = \frac{k_v}{k_p}\big[-k_p z(0) - (G, z)_{L^2(0,1)}\big]\big[k_p y(0) + (G, y)_{L^2(0,1)}\big]$$
$$+ \sum_{p=0}^{+\infty} (k_v + d_p)\, B_p(AY, Y)$$

avec $B_p(AY,Y) = \begin{cases} (\varphi_p, -y_{xx})(\varphi_p, z) + \dfrac{1}{\omega_p^2}(\varphi_{px}, -z_x)(\varphi_{px}, y_x) & \text{pour } p \geq 1 \\ (\varphi_0, -y_{xx})(\varphi_0, z). & \end{cases}$

Tous calculs faits on obtient $B_p(AY, Y) = (\varphi_p, z)\varphi_p(0) y_x(0) \qquad \forall\, p \geq 0,$

ce qui implique que

$$B(AY, Y) = -\frac{k_v}{k_p}\big[k_p z(0) + (G, z)\big]\big[k_p y(0) + (G, y)\big]$$
$$+ \frac{k_v}{k_p}\big[k_p z(0) + (G, z)\big] y_x(0)$$

$$= \left(\frac{k_v}{k_p}\right)^2 \big[k_p z(0) + (G, z)\big]^2 \geq 0,$$

d'où la monotonie de A .

ii) Surjection de l'opérateur $I+\lambda_0 A$, $\lambda_0 > 0$.

Montrons que $\forall$ (f, g) $\in$ E, $\exists$! (u, v) $\in$ D(A) tel que :

$$(I + \lambda_0 A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

où λ_0 est une constante positive qui sera fixée ultérieurement. Soit donc le système

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.}$$

$$\begin{cases} u - \lambda_0 v = f \\ v - \lambda_0 \Delta u = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - \lambda_0 v = f \\ u - \lambda_0^2 u_{xx} = \lambda_0 g + f = F. \end{cases}$$

On a donc à résoudre

$$\text{(II.3)} \quad \begin{cases} u - \lambda_0^2 u_{xx} = F \in L^2(0,1) \\ u_x(0) = \left(k_p + \dfrac{k_v}{\lambda_0}\right) u(0) + \left(1 + \dfrac{k_v}{k_p \lambda_0}\right)(G, u)_{L^2(0,1)} \\ \qquad - \dfrac{k_v}{\lambda_0}\left[f(0) + \dfrac{1}{k_p}(G, f)_{L^2(0,1)}\right] \\ u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Soit $\psi \in H^1(0,1)$, alors (II.3) implique $(u - \lambda_0^2 u_{xx}, \psi)_{L^2(0,1)} = (F, \psi)_{L^2(0,1)}$, et par intégration par parties,

$$\begin{aligned} a(u, \psi) = & \int_0^1 u\psi dx + \lambda_0^2 \int_0^1 u_x \psi_x \, dx + \lambda_0^2 \left(k_p + \frac{k_v}{\lambda_0}\right) u(0)\psi(0) \\ & + \lambda_0^2 \left(1 + \frac{k_v}{k_p \lambda_0}\right)(G, u)\ \psi(0) \\ = & (F, \psi)_{L^2(0,1)} + \lambda_0 k_v \left[f(0) + \frac{1}{k_p}(G, f)\right]\psi(0) = b(\psi). \end{aligned}$$

La forme a est bilinéaire continue sur $H^1(0,1) \times H^1(0,1)$, et coercive pour $\lambda_0 > 0$ assez petit. La forme b est linéaire continue sur $H^1(0,1)$.

Par le Théorème de Lax-Milgram, $\exists$! $u \in H^1(0,1)$ tel que

(II.4) $\qquad a(u, \psi) = b(\psi), \ \forall \ \psi \in H^1(0,1).$

Montrons qu'on a bien une solution pour (II.3).

En prenant ψ dans $\mathcal{D}(0,1)$, on déduit d'abord que $u - \lambda_0^2 u_{xx} = F$ p.p. dans $L^2(0,1)$,

d'où la régularité $H^2(0,1)$.

Ensuite pour $\psi \in H^1(0,1)$, l'équation (II.4) s'écrit:

$$(u - \lambda_0^2 u_{xx}, \psi)_{L^2(0,1)} + \lambda_0^2 u_x(1)\psi(1) =$$

$$(F, \psi)_{L^2(0,1)} + \lambda_0^2 \left[u_x(0) - (k_p + \frac{k_v}{\lambda_0})\, u(0) - (1 + \frac{k_v}{k_p \lambda_0})\, (G, u)_{L^2(0,1)} + \frac{k_v}{\lambda_0} \left(f(0) + \frac{1}{k_p}\, (G, f) \right) \right] \psi(0).$$

Comme $\psi(0)$ et $\psi(1)$ sont arbitraires, on déduit les conditions aux limites de (II.3). Donc il existe une solution unique $u \in H^2(0,1)$ de (II.3).

D'où la surjection de $I + \lambda_0 A$ pour un $\lambda_0 > 0$, et par conséquent A est maximal monotone.

La densité de D(A) dans E est évidente car E est un Hilbert et A est maximal monotone.

D'après le théorème de Hille-Yosida , pour toute condition initiale (y_0, y_1) dans D(A), le problème (II.2) admet une solution unique

$$(y, z) \in C([0,+\infty[\ ; D(A)) \cap C^1([0,+\infty[\ ; H^1(0,1) x L^2(0,1)) \text{ , avec } z = y_t.$$

D'où $y \in C^2\big([0,+\infty[, L^2(0,1)\big) \cap C^1\big([0, +\infty[, H^1(0,1)\big) \cap C\big([0, +\infty[, H^2(0,1)\big)$ d'après [5].

L'application $(y_0, y_1) \rightarrow (y(t), z(t))$ s'étend en une contraction S(t) sur E telle que $(S(t))_{t \geq 0}$ soit fortement continue , et on peut définir pour toute condition initiale (y_0, y_1) dans E la solution faible de (II.2) par la formule

$$(y(t), z(t)) = S(t)\, (y_0, y_1),\ t \geq 0.$$

Alors $(y, z) \in C([0,+\infty[\ ; E)$, et donc $y \in C([0,+\infty[\ ; H^1(0,1)) \cap C^1([0, +\infty[\ ; L^2(0,1))$ d'après [5], ce qui termine la preuve du théorème II-1.

III - Stabilisation asymptotique

On fait l'hypothèse suivante

$$k_v + d_p = k_v + \frac{k_v}{k_p} \; \frac{(G, \varphi_p)_{L^2(0,1)}}{\varphi_p(0)} > 0, \text{ pour tout } p \geq 0.$$

Pour toute solution y de (II.1) , on introduit la fonction V(t) par

$$V(t) = \frac{k_v}{2k_p} \left[k_p y(0,t) + \int_0^1 G y\, dx \right]^2 + \sum_{p=0}^{+\infty} (k_v + d_p)\, V_p(t)$$

$$\text{avec } V_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\varphi_p, y_t)^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2\omega_p^2} (\varphi_{px}, y_x)^2_{L^2(0,1)}, & \text{pour tout } p \geq 1 \\ \frac{1}{2} (\varphi_0, y_t)^2_{L^2(0,1)}, & \text{pour } p = 0. \end{cases}$$

Théorème III.1. *Pour tout (y_0, y_1) dans E, V(t) est une fonction de Lyapunov, et $V(t) \to 0$ lorsque $t \uparrow +\infty$, i.e. le système (II.2) est asymptotiquement stable.*

Preuve.
On fera la preuve pour des données initiales (y_0, y_1) dans D(A) . Grâce à la densité de D(A) dans E, elle s'étendra pour toute donnée initiale dans E.
Pour $t \geq 0$, on a

$$V(t) = \frac{1}{2}\, B\left(\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}\right), \text{ avec } \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix} \text{ solution du système (II.2).}$$

Il est clair que $V(t) \geq 0 \ \forall\, t \geq 0$, et $\frac{dV(t)}{dt} = B\left(\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}, \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}\right) = -\, B\left(A\begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}\right)$.
Comme l'opérateur A est monotone pour le produit scalaire B, $\frac{dV(t)}{dt} \leq 0$, donc V(t) est une fonction de Lyapounov.
Pour montrer la stabilité asymptotique, on utilisera le principe d'invariance de Lasalle [7]. La résolvante de A est compacte, et d'après [3, Théorème 3], il en résulte que la trajectoire $O^+(y_0, y_1) = \{(y(t), y_t(t)),\ t \geq 0\}$ est relativement compacte dans E pour des données initiales dans D(A).
Appliquons le principe d'invariance de Lasalle à l'ensemble ω-limite $\omega(y_0, y_1)$ de l'orbite $O^+(y_0, y_1)$.
Le problème se réduit à montrer que $\omega(y_0, y_1) = \{(0,0)\}$.
On a, pour $(y_0, y_1) \in D(A)$

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{k_v}{k_p}\right)^2 \left[k_p y_t(0,t) + (G, y_t)_{L^2(0,1)}\right]^2 \leq 0, \text{ donc}$$

$$V(t) - V(s) + \int_s^t \left[k_v\, y_t(0, \sigma) + \frac{k_v}{k_p}(G, y_t(\sigma))\right]^2 d\sigma = 0.$$

Soit $(z_0, z_1) \in \omega(y_0, y_1) \subset D(A)$.

Si $(z(t), z_t(t))$ est la trajectoire associée à (z_0, z_1) alors

$$\int_s^t \left[k_v\, z_t(0, \sigma) + \frac{k_v}{k_p}(G, z_t(\sigma))\right]^2 d\sigma = 0,$$

d'où $k_v z_t(0,t) + \frac{k_v}{k_p}(G, z_t) = 0, \quad \forall\, t \geq 0.$

Ainsi $\omega(y_0, y_1)$ est inclus dans l'ensemble des conditions initiales dont la solution associée a une énergie constante, i.e. on aura :

$$(\text{III.1}) \qquad \begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ z_x(0,t) = k_p\, z(0,t) + (G,z)_{L^2(0,1)} = D \\ z_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

avec une donnée initiale (z_0, z_1), et on a la condition supplémentaire

$$k_p\, z_t(0,t) + (G, z_t) = 0 \qquad \forall\, t \geq 0.$$

On intègre l'équation $z_{tt} - z_{xx} = 0$ sur $]0, T[\times]0, 1[$,

$$\int_0^T \int_0^1 z_{tt}(x,t)\, dx\, dt = \int_0^T \int_0^1 z_{xx}(x,t)\, dx\, dt$$

$$\Big[\int_0^1 z_t(x,t)\, dx \Big]_0^T = - T\, z_x(0,T) = -TD.$$

L'intégrale $\Big[\int_0^1 z_t(x,t)\, dx \Big]_0^T$ est bornée car l'énergie l'est. On divise l'équation ci-dessus par T, puis on fait tendre T vers $+\infty$, ce qui donne $D = 0$.

Dans ce cas, (III.1) se réduit à

$$(\text{III.2}) \qquad \begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ z_x(0,t) = 0 \\ z_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

avec la condition supplémentaire

$$(\text{III.3}) \qquad k_p\, z(0,t) + (G, z)_{L^2(0,1)} = 0.$$

La solution du système (III.2) peut s'écrire sous la forme

$$z(x,t) = \sum_{p=0}^{+\infty} (a_p \cos(\omega_p t) + b_p \sin(\omega_p t))\, \varphi_p(x),$$

où $a_p = (z_0, \varphi_p)_{L^2(0,1)}$ et $b_p = \dfrac{(z_1, \varphi_p)_{L^2(0,1)}}{\omega_p}$.

On montre facilement que les séries de termes généraux $(\omega_p^2\, a_p)_{p \geq 0}$ et $(\omega_p^2\, b_p)_{p \geq 0}$ sont de carrés sommables, d'où la convergence dans $H^1(0,1)$ de la série

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (a_p \cos(\omega_p t) + b_p \sin(\omega_p t))\, \varphi_p(x).$$

L'équation (III.3) s'écrit alors

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \Big[\Big(k_p + \frac{k_p}{k_v} d_p\Big)\, \varphi_p(0)\Big]\, [a_p \cos \omega_p t + b_p \sin \omega_p t] = 0, \text{ où } d_p = \frac{k_v}{k_p}\, \frac{(G, \varphi_p)_{L^2(0,1)}}{\varphi_p(0)}.$$

En utilisant un argument classique de fonctions presque-périodiques [1] et la condition $(k_p + \frac{k_p}{k_v} d_p)\, \varphi_p(0) \neq 0 \quad \forall\, p \geq 0$, on en déduit $a_p = b_p = 0, \quad \forall\, p \geq 0$.

Donc $z = 0$, et aussi $z_t = 0$, d'où $\omega(y_0, y_1) = \{ (0,0) \}$.

Par suite $V(t) \underset{t \uparrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, et puisque $V(t)$ est équivalente à $\| (y, y_t) \|_E^2$ on déduit la stabilité asymptotique du système (II.2), ce qui termine la preuve du théorème III.1.

IV - Stabilisation uniforme

Il s'agit d'étudier la stabilisation uniforme du système

$$\text{(IV.1)} \qquad \begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ y_x(0,t) = k_p\big(y(0) + \frac{1}{k_p}(G, y)_{L^2(0,1)}\big) + k_v\big(y_t(0) + \frac{1}{k_p}(G, y_t)_{L^2(0,1)}\big) \\ y_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

avec $(y(x,0), y_t(x,0)) = (y_0, y_1) \in E = H^1(0,1) \times L^2(0,1)$.

Théorème IV.1. *Soit $G \in H^1(0,1)$ vérifiant $G(0) = 0$, et $k_v + \frac{k_v}{k_p} \frac{(G, \varphi_p)_{L^2(0,1)}}{\varphi_p(0)} > 0$, pour tout $p \geq 0$. Alors le système (IV.1) est uniformément exponentiellement stable.*

Remarque. Une classe de fonctions G pour lesquelles on a la stabilisation uniforme du système (IV.1) est $G(x) = \beta(e^{\alpha x} - 1)$, avec $\beta \geq 0$ et $\alpha \leq 0$.

En effet $G \in H^1(0,1)$ $G(0) = 0$ et $(G, \varphi_p)_{L^2(0,1)} = \dfrac{-\alpha\beta}{\omega_p^2 + \alpha^2}\,(1 + (-1)^{p+1} e^{\alpha}) \geq 0$.

Lemme IV.1. *L'opérateur linéaire C qui à y associe $y + \frac{1}{k_p}(G, y)_{L^2(0,1)}$ est continu bijectif et d'inverse continu de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ et de $H^1(0,1)$ dans $H^1(0,1)$.*

Preuve du lemme IV.1.

Soit l'équation $y + \frac{1}{k_p}(G, y)_{L^2} = z$.

On multiplie scalairement dans $L^2(0,1)$ les deux membres de l'équation par G

$$(G, y) + \frac{1}{k_p}(G, y) \int_0^1 G(x)\, dx = (G, z)_{L^2(0,1)}, \text{ soit}$$

$$\frac{k_p}{k_v}(G, y)[k_v + d_0] = (G, z)_{L^2(0,1)},$$

d'où $\frac{1}{k_p}(G, y) = \frac{(G, z)_{L^2(0,1)}}{k_p + (G(x), 1)_{L^2(0,1)}}$ (le dénominateur est par hypothèse $\neq 0$).

Par suite $y = z - \frac{1}{k_p + (G(x), 1)_{L^2(0,1)}}(G, z)_{L^2(0,1)}$.

Donc C est bijectif et d'inverse continu.

Démonstration du théorème IV.1.

Le changement de fonction $z = y + \frac{1}{k_p}(G, y)_{L^2(0,1)}$ dans le système (IV.1) donne

$$\text{(IV.2)} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z \\ z_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z_t \\ -z_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k_p}(G, z_{xx}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z_x(0) = k_p\, z(0) + k_v\, z_t(0) \\ z_x(1) = 0. \end{cases}$$

On remarque d'abord que la solution de (IV.2) est régie par un semi-groupe fortement continu $\mathscr{C}S(t)\mathscr{C}^{-1}$(pas nécessairement dissipatif), et (IV.2) est fortement asymptotiquement stable car $(z, z_t) = (Cy, Cy_t) = \mathscr{C}(y, y_t)$.

Ensuite, compte-tenu des hypothèses faites sur G , on a

$-\frac{1}{k_p}(G, z_{xx}) = \frac{1}{k_p}G(0)\, z_x(0) + \frac{1}{k_p}(G_x, z_x) = \frac{1}{k_p}(G_x, z_x)$.

Donc (IV.2) s'écrit aussi

$$\text{(IV.3)} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z \\ z_t \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} -z_t \\ -z_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k_p}(G_x, z_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z_x(0) = k_p\, z(0) + k_v\, z_t(0) \\ z_x(1) = 0. \end{cases}$$

L'opérateur $F : E \to E$ défini par

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k_p}(G_x, u_x) \end{pmatrix}$$ est linéaire continu et compact.

Si on perturbe (IV.3) par - F, on obtient :

$$\text{(IV.4)} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z \\ z_t \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} -z_t \\ -z_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z_x(0) = k_p\, z(0) + k_v\, z_t(0) \\ z_x(1) = 0, \end{cases}$$

qui est uniformément exponentiellement stable d'après [2, Théorème 1] (cf aussi [9]). D'après [8], on a la stabilité exponentielle de (IV.2), et grâce à la propriété d'inversibilité de $\mathscr{P}$, on en déduit la stabilité exponentielle uniforme de (IV.1).

Remarques

1) Dans la preuve du Théorème IV.1, on n'a pas utilisé un résultat de perturbation plus classique de GIBSON [4], car on ne sait pas si le semi-groupe qui régit la solution de (IV.3) est contractant pour la norme sur E associée au produit scalaire B. Mais à l'aide d'un changement de norme sur E, on pourrait se ramener à un semi-groupe contractant.

2) Les résultats précédents s'étendent au cas du bras flexible en torsion avec masse et raideur variables, dont l'étude est faite dans l'annexe ci-après.

Annexe

On considère maintenant le modèle de bras flexible en torsion avec masse $m(x)$ et raideur $k(x)$ variables:

$$\text{(IV.5)}\quad \begin{cases} m(x)y_{tt}(x,t) - (ky_x)_x\,(x,t) = 0\,,\ x \in\ ]0,1[\,,\ t > 0 \\ (ky_x)\,(0,t) = k_p y(0,t) + k_v y_t(0,t) + (G,\, y)_{L^2(0,1)} + (G,\, y_t)_{L^2(0,1)} \\ (ky_x)\,(1,t) = 0 \end{cases}$$

$(y(x,0),y_t(x,0)) = (y_0(x),\ y_1(x))$, avec $k_p, k_v > 0$.

On suppose m, k de classe C^1 tels que $k(x)\,, m(x) \geq \rho > 0,\ \forall\, x \in [0,1]$.

On pose $H = L^2(0,1),\ V = H^1(0,1),\ (u, v)_H = \int_0^1 muvdx,\ a(u, v) = \int_0^1 ku_xv_xdx,$

et $(u,v)_V = \int_0^1 ku_xv_xdx + k_pu(0)v(0).$

Soit $\{\psi_i\} \in \{u \in V,\, ku_x \in V,\, (ku_x)(1) = (ku_x)(0) = 0\}$, une suite complète de solutions du système autonome suivant :

$$\text{(IV.6)}\qquad \begin{cases} \dfrac{-1}{m(x)}\,(k\psi_{ix})_x = \omega_i^2\psi_i, \qquad i \in \mathbb{N} \\ (k\psi_{ix})(1) = (k\psi_{ix})(0) = 0, \end{cases}$$

normalisées par $(\psi_i,\psi_i)_H = \int_0^1 m\psi_i{}^2dx = 1\,.$

On a $\psi_i(0) \neq 0$, et les $(\psi_i)_{i\geq 0}$ forment une base Hilbertienne de H (cf. [6]).

On fait les hypothèses suivantes :

$$k_V + d_i = k_V + \frac{k_V}{k_p} \frac{(\frac{1}{m}G, \psi_i)_H}{\psi_i(0)} > 0, \quad \text{pour tout } i \geq 0.$$

Sur E = VxH, on définit le produit scalaire suivant, équivalent au produit scalaire usuel : pour tout $U_1 = \binom{u_1}{v_1}$, $U_2 = \binom{u_2}{v_2}$ dans E,

$$B_1(U_1, U_2) = \frac{k_V}{k_p} [\, k_p\, u_1(0) + (\tfrac{1}{m} G, u_1)_H] [\, k_p u_2(0) + (\tfrac{1}{m} G, u_2)_H]$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} (k_V + d_i)\, B_{1,i}(U_1, U_2),$$

avec

$$B_{1,i}(U_1, U_2) = \begin{cases} (\psi_i, v_1)_H\, (\psi_i, v_2)_H + \dfrac{1}{\omega_i^2} a(\psi_i, u_1)\, a(\psi_i, u_2) & \text{pour } i \geq 0 \\ (\psi_0, v_1)_H \;\; (\psi_0, v_2)_H & \text{pour } i = 0\,. \end{cases}$$

On écrit l'équation (IV.5) sous la forme opérationnelle suivante

$$\text{(IV.7)} \quad \binom{y}{z}_t + A_1 \binom{y}{z} = 0, \quad \binom{y(0)}{z(0)} = \binom{y_0}{y_1}, \text{ avec } A_1 \binom{y}{z} = \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{1}{m}(ky_x)_x \end{pmatrix},$$

$$D(A_1) = \Big\{ (y, z) \in H^1(0,1) \times H^1(0,1)\,;\, ky_x \in H^1(0,1);\, (ky_x)(1) = 0;$$

$$(ky_x)(0) = k_p\, y(0,t) + k_V z(0,t) + (\tfrac{1}{m} G, y)_H + \frac{k_V}{k_p} (\tfrac{1}{m} G, z)_H \Big\}.$$

On montre comme avant que A_1 est maximal monotone.

Donc (IV.7) est bien posé au sens des semi-groupes de contractions, et on a la stabilité asymptotique, par les mêmes arguments que dans le cas de masse et raideur constantes. La fonctionnelle de Lyapounov considérée ici est :

$$V(t) = \frac{1}{2} B_1(Y,Y)\,, \text{ pour tout } Y = \binom{y}{y_t} \text{ solution de (IV.7).}$$

En ce qui concerne la stabilisation exponentielle et toujours avec la condition

$$k_v + \frac{k_v}{k_p} \frac{(\frac{1}{m}G, \psi_i)_H}{\psi_i(0)} > 0 \quad \forall\, i \geq 0,$$

le changement de fonction $y \to y + \frac{1}{k_p}(\frac{1}{m}G, y)_H = z$, dans (IV.5) donne

$$\text{(IV.8)} \qquad \begin{cases} m\, z_{tt} - (kz_x)_x = \dfrac{m(x)}{k_p} \displaystyle\int_0^1 \frac{G}{m}(kz_x)_x\, dx \\ (kz_x)(0) = k_p z(0) + k_v z_t(0) \\ (kz_x)(1) = 0. \end{cases}$$

Si on prend $G \in H^1(0,1)$ telle que $G(0) = 0$, on a

$$\int_0^1 \frac{G}{m}(kz_x)_x\, dx = - \int_0^1 \left(\frac{G}{m}\right)_x kz_x\, dx.$$

Donc $\binom{u}{v} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-m(x)}{k_p} \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{G}{m}\right)_x ku_x\, dx \end{pmatrix}$ définit un opérateur linéaire, continu et compact sur E.

Le système (IV.8) admet une solution au sens des semi-groupes fortement continus (pas forcément de contractions) et il est asymptotiquement stable.

Le système

$$\text{(IV.9)} \qquad \begin{cases} m\, z_{tt} - (kz_x)_x = 0 \\ (kz_x)(0) = k_p z(0) + k_v\, z_t(0) \\ (kz_x)(1) = 0 \end{cases}$$

est exponentiellement uniformément stable (cf. preuve ci-après). Grâce à un résultat de perturbation compacte de R. TRIGGIANI [8], on déduit la stabilisation exponentielle uniforme de (IV.8).

Le changement de variable étant bijectif et bicontinu, on obtient la stabilisation exponentielle uniforme de (IV.5).

Etude de la stabilisation exponentielle du système (IV.9)

$$\text{(IV.9)} \qquad \begin{cases} m(x)\, z_{tt}(x,t) - (k(x) z_x(x,t))_x = 0 \\ k(0) z_x(0,t) = k_p z(0,t) + k_v\, z_t(0,t) \\ k(1) z_x(1,t) = 0, \end{cases}$$

avec m et k des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$, $k(x), m(x) \geq \rho > 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$.

Soit $\displaystyle E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 k(x) z_x^2(x,t) + m(x) z_t^2(x,t)\, dx + \frac{k_p}{2} z^2(0,t).$

On considère

$$P(t) = 2\, C_1 \int_0^1 y_t \varphi(x)\, z_x dx + C_0 z(0,t) \int_0^1 m z_t dx,$$

$$\text{avec } \varphi(x) = \exp\left(\int_x^0 \left| \frac{(mk)_x}{mk} \right| d\sigma \right) \int_1^x \exp\left(\int_0^\sigma \left| \frac{(mk)_x}{mk} \right| d\tau \right) d\sigma.$$

C_0, C_1 étant deux constantes strictement positives à fixer ultérieurement.
Le choix de $\varphi(x)$ a été inspiré par [2].

<u>Quelques propriétés de $\varphi(x)$</u>

. $\varphi \in H^1(0,1)$, $\varphi_x \geq 1$ et $mk\left(\dfrac{\varphi(x)}{mk}\right)_x \geq 1$.

. $\varphi(0) < 0$, $\varphi(1) = 0$.

Il est également facile de prouver que

$$| P(t) | \leq \left[2 C_1 \left\| \frac{\varphi}{\sqrt{mk}} \right\|_{L^\infty(0,1)} + \| m \|_{L^\infty(0,1)} \right] \left(\frac{1}{2} \int_0^1 (m z_t^2 + k z_x^2)\, dx \right)$$

$$+ \frac{C_0^2}{k_p} \cdot \frac{k_p}{2} z^2(0,t),$$

d'où l'on déduit que $| P(t) | \leq C_3 E(t)$,

$$\text{avec } C_3 = \max\left(2 C_1 \left\| \frac{\varphi}{\sqrt{mk}} \right\|_{L^\infty(0,1)} + \| m \|_{L^\infty(0,1)} ,\ \frac{C_0^2}{k_p} \right).$$

<u>Calcul et estimation de $P'(t)$</u>

$$P'(t) = 2\, C_1 \int_0^1 m z_{tt} \frac{\varphi}{mk} k z_x\, dx + 2\, C_1 \int_0^1 z_t\, \varphi\, z_{xt}\, dx$$

$$+ C_0\, z_t(0,t) \int_0^1 m z_t\, dx + C_0\, z(0,t) \int_0^1 m z_{tt}\, dx$$

$$P'(t) = C_1 \int_0^1 \left((kz_x)^2\right)_x \frac{\varphi}{mk}\, dx + C_1 \int_0^1 (z_t^2)_x \varphi(x) dx + C_0\, z_t(0,t) \int_0^1 m z_t\, dx$$

$$+ C_0\, z(0,t) \left[- k_p\, z(0,t) - k_v\, z_t(0,t) \right]$$

$$= - C_1 \int_0^1 k z_x^2 \frac{mk}{m} \left(\frac{\varphi}{mk}\right)_x dx - C_1 \int_0^1 m z_t^2\, \frac{\varphi_x}{m}\, dx + \frac{-C_1 \varphi(0)}{m(0)\, k(0)} (kz_x)^2(0,t)$$

$$- C_1\, \varphi(0)\, z_t^2(0,t) + C_0\, z_t(0,t) \int_0^1 m z_t\, dx + C_0\, z(0,t)\left[- k_p z(0,t) - k_v z_t(0,t)\right].$$

Les propriétés $mk\left(\frac{\varphi}{mk}\right)_x \geq 1$ et $\varphi_x \geq 1$ impliquent que, en posant $b = \max_{[0,1]} m$,

$$P'(t) \leq \frac{-2\, C_1}{b}\left[\frac{1}{2} \int_0^1 (k z_x^2 + m z_t^2)\, dx\right] + \left(\frac{C_0^2\, \varepsilon_1}{2} + \frac{C_0^2\, k_v^2}{2}\right) z_t^2(0,t) +$$

$$+ \frac{\| m \|_{L^\infty(0,1)}}{\varepsilon_1} \frac{1}{2} \int_0^1 m z_t^2\, dx + \left(- C_0\, k_p + \frac{1}{2}\right) z^2(0,t) - C_1\, \varphi(0)\, z_t^2(0,t)$$

$$+ \frac{-C_1 \varphi(0)}{m(0)\, k(0)} \left[k_p\, z(0,t) + k_v\, z_t(0,t)\right]$$

En écrivant que

$$\left[k_p\, z(0,t) + k_v\, z_t(0,t)\right]^2 \leq 2k_p^2\, z^2(0,t) + 2k_v^2\, z_t^2(0,t),$$

on obtient

$$P'(t) \leq \frac{-2\, C_1}{b}\left[\frac{1}{2} \int_0^1 (k z_x^2 + m z_t^2)\, dx\right] + \frac{\| m \|_{L^\infty(0,1)}}{\varepsilon_1} \frac{1}{2} \int_0^1 m z_t^2\, dx$$

$$+ \left(\frac{C_0^2\, \varepsilon_1}{2} + \frac{C_0^2\, k_v^2}{2} - C_1\, \varphi(0) - \frac{C_1 \varphi(0) 2 k_p^2}{m(0)\, k(0)}\right) z_t^2(0,t)$$

$$+ \left(- C_0\, k_p + \frac{1}{2} + \frac{-2 k_v^2\, C_1 \varphi(0)}{m(0)\, k(0)}\right) z^2(0,t)\,.$$

On pose maintenant $C_1 = b$ et $\varepsilon_1 = \| m \|_{L^\infty(0,1)}$ et on obtient alors

$$P'(t) \leq - E(t)+\left(\frac{C_0^2 \,\|\, m \,\|_{L^\infty(0,1)}}{2} + \frac{C_0^2\, k_v^2}{2} - b\varphi(0)\left[1 + \frac{2k_p^2}{m(0)k(0)}\right]\right) z_t^2(0,t)$$

$$+ \left(\frac{k_p}{2} - C_0\, k_p + \frac{1}{2} + \frac{-2k_v^2\, b\varphi(0)}{m(0)\, k(0)}\right) z^2(0,t)\,.$$

On choisit $C_0 > 0$ tel que le coefficient en $z^2(0,t)$ soit nul , et on note $C_2 > 0$ le coefficient du terme en $z_t^2(0,t)$.

D'où l'estimation

$$P'(t) \leq - E(t) + C_2\, z_t^2(0,t), \text{ avec } C_2 > 0\,.$$

Les deux inégalités

(i) $|P(t)| \leq C_3\, E(t)$.

(ii) $P'(t) \leq - E(t) + C_2\, z_t^2(0,t)$

impliquent la stabilisation exponentielle du système (IV.8) de façon classique .

En effet , on pose $E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon P(t)$. Alors

$$E'_\varepsilon(t) = E'(t) + \varepsilon P'(t) \;\leq - \varepsilon E(t) - (k_v - C_2\varepsilon)\, z_t^2(0,t)\,.$$

On prend $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = k_v\, C_2^{-1}$, et $0 < \varepsilon < C_3^{-1}$.

On a alors

(iii) $E'_\varepsilon(t) \;\leq - \varepsilon E(t) \leq - \varepsilon\,(1 + \varepsilon\, C_3)^{-1}\, E_\varepsilon\,(t)$.

On pose $C_4 = (1 + C_3\, \varepsilon_0)^{-1}$ et $\varepsilon < C_3^{-1}\,(1 - C^{-1/2})$, pour tout $C > 1$.

i) et iii) impliquent la décroissance exponentielle de l'énergie E(t)

$$E(t) \leq C \exp(-\omega t)\, E(0)\,,\ \forall\, t \geq 0, \text{ avec } \omega = C_4\varepsilon_0 = (C_3 + \varepsilon_0^{-1})^{-1}\,.$$

DEUXIEME PARTIE

Il s'agit d'étudier l'existence, la stabilité forte, ainsi que la stabilité exponentielle uniforme, du système suivant :

$$(0.1)\quad \begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in \,]0,1[,\ t > 0 \\ y_x(0,t) = k_p\, y(0,t) + k_v y_t(0,t) - \displaystyle\int_0^1 K(x)\, y_x(x,t)\, dx \\ y_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

avec $(y(x,0), y_t(x,0)) = (y_0\,, y_1) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1) = E$.

Pour K dans $H^1(0,1)$ avec $K(0) = K(1) = 0$, $K_x = G$, on a un contrôle feedback du type de celui étudié dans la première partie, mais où on ne tient pas compte du terme distribué en vitesse.

I - Existence de solutions fortes et faibles

On peut écrire le système (0.1) sous la forme opérationnelle suivante, avec $z = y_t$

$(y(0), z(0) = (y_0, y_1) \in E = H^1(0,1) \times L^2(0,1)$

$$(I.1)\qquad \binom{y}{z}_t + A\binom{y}{z} = \binom{0}{0},$$

avec $A\binom{y}{z} = \binom{-z}{-y_{xx}}$,

où $D(A) = \left\{ (y,z) \in H^2(0,1)\times H^1(0,1);\ y_x(0) = k_p y(0)+k_v z(0) - \displaystyle\int_0^1 K y_x\, dx;\ y_x(1) = 0 \right\}$.

On suppose $K \in L^2(0,1)$. Soit $\varphi_p(x) = \sqrt{2}\cos \omega_p x$, avec $\omega_p = (p + 1/2)\pi$, la solution normalisée dans $L^2(0,1)$ du système

$$(I.2)\qquad \begin{cases} -\varphi_{p_{xx}} = \omega_p^2\, \varphi_p \quad , \ p \geq 0 \\ \varphi_p(1) = \varphi_{p_x}(0) = 0\,. \end{cases}$$

On a $\varphi_p(0) \neq 0$, et les $(\varphi_p)_{p\geq 0}$ forment une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$.

On suppose enfin que $\varphi_p(0) \displaystyle\int_0^1 K(x)\, \varphi_p(x)\, dx > -\, \varphi_p^2(0)$, pour tout $p \geq 0$.

Soient $U_1 = \binom{u_1}{v_1}$, $U_2 = \binom{u_2}{v_2}$ dans E.

La forme bilinéaire symétrique sur E

$$B(U_1, U_2) = \int_0^1 u_{1_x} \cdot u_{2_x}\, dx + \int_0^1 v_1 \cdot v_2\, dx + k_p\, u_1(0)\, u_2(0) + \sum_{p=0}^{+\infty} B_p\, (U_1, U_2),$$

avec $B_p(U_1, U_2) = \dfrac{(K, \varphi_p)}{\varphi_p(0)} \left[(u_{1_x}, \varphi_p)\,(u_{2_x}, \varphi_p) + \dfrac{(v_1, \varphi_{p_x})\,(v_2, \varphi_{p_x})}{\omega_p^2} \right]$,

définit un produit scalaire sur E dont la norme associée est équivalente à la norme usuelle sur $H^1(0,1) \times L^2(0,1)$.

Théorème I.1. *L'opérateur linéaire A est maximal monotone sur E. Pour toute condition initiale (y_0, y_1) dans E, le système (0.1) admet une solution faible unique*

$$y \in C([0,+\infty[, H^1(0,1)) \cap C^1([0,+\infty[\,; L^2(0,1)).$$

Si $(y_0, y_1) \in D(A)$, alors le système (0,1) admet une solution forte unique

$$y \in C^2([0,+\infty[\,; L^2(0,1)) \cap C^1([0,+\infty[, H^1(0,1)) \cap C([0,+\infty[, H^2(0,1)).$$

Démonstration.

i) Monotonie de l'opérateur linéaire A.

Soit $Y = \binom{y}{z} \in D(A)$, $AY = \binom{-z}{-y_{xx}}$. Alors

$$B(AY, Y) = -\int_0^1 y_x\, z_x\, dx - \int_0^1 z\, y_{xx}\, dx - k_p y(0)\, z(0) + \sum_{p=0}^{+\infty} B_p(AY, Y).$$

Grâce à une intégration par parties, on a

$$B(AY, Y) = k_v z^2(0) - z(0) \int_0^1 K y_x\, dx + \sum_{p=0}^{+\infty} B_p(AY, Y),$$

avec $B_p(AY, Y) = z(0) \displaystyle\int_0^1 y_x \varphi_p\, dx \int_0^1 \varphi_p K dx, \ \forall\, p \geq 0$.

Comme (φ_p) est une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} B_p(AY, Y) = z(0) \int_0^1 K y_x\, dx \text{ , donc } B(AY, Y) = k_v z^2(0) \geq 0,$$

d'où la monotonie de A.

ii) Surjection de l'opérateur $I + \lambda A$, $\lambda > 0$.

Montrons que $\forall (f,g) \in E$, $\exists\, !\, (u, v) \in D(A)$ tel que

$(I + \lambda A) \binom{u}{v} = \binom{f}{g}$, c'est à dire

$$\begin{cases} u - \lambda v = f \\ v - \lambda u_{xx} = g, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} v = \dfrac{u - f}{\lambda} \\ u - \lambda^2 u_{xx} = f + \lambda g = F. \end{cases}$$

On a donc à résoudre

$$\text{(I.3)} \qquad \begin{cases} u - \lambda^2 u_{xx} = F \in L^2(0,1) \\ u_x(0) = k_p u(0) + \dfrac{k_v}{\lambda}\, u(0) - \displaystyle\int_0^1 K u_x \, dx - \dfrac{k_v}{\lambda} f(0) \\ u_x(1) = 0. \end{cases}$$

Soit $\psi \in H^1(0,1)$. Alors (I.3) implique

$$\int_0^1 (u - \lambda^2 u_{xx}).\ \psi dx = \int_0^1 F\psi \ dx.$$

Une intégration par parties conduit à l'équation

$$a(u, \psi) = \int_0^1 (u\psi + \lambda^2 u_x \psi_x)\, dx + \lambda^2 (k_p + \frac{k_v}{\lambda})\, u(0)\psi(0) - \lambda^2 \psi(0) \int_0^1 K u_x \, dx$$

$$= \int_0^1 F\psi \, dx + \lambda k_v\, f(0)\psi(0) = b(\psi).$$

La forme bilinéaire a est continue sur $H^1(0, 1)\mathrm{x}H^1(0, 1)$, et coercive pour $\lambda > 0$ assez petit. D'autre part la forme b est linéaire continue sur $H^1(0,1)$.

D'après le Théorème de Lax-Milgram, il existe $u \in H^1(0,1)$ telle que

(I.4) $\qquad a(u, \psi) = b(\psi), \ \forall \psi \in H^1(0,1).$

En prenant d'abord ψ dans $\mathcal{D}(0,1)$, on obtient $u - \lambda^2 u_{xx} = F$ p.p. dans $L^2(0,1)$.
D'où la régularité $H^2(0,1)$. Puis, pour ψ quelconque dans $H^1(0,1)$, on obtient

$$\int_0^1 (u - \lambda^2 u_{xx})\, \psi \, dx + \lambda^2 u_x(1)\, \psi(0) =$$

$$\int_0^1 F\, \psi \, dx + \lambda^2 \left[u_x(0) - (k_p + \frac{k_v}{\lambda}) u(0) + \int_0^1 K u_x \, dx + \frac{k_v}{\lambda} f(0) \right] \psi(0).$$

Comme $\psi(0)$ et $\psi(1)$ sont arbitraires, on déduit les conditions aux limites de (I.3). Il existe donc une solution unique $u \in H^2(0,1)$ de (I.3).

D'où la surjection de $I + \lambda A$ pour un $\lambda > 0$. Donc A est maximal monotone sur E, espace de Hilbert, et par conséquent D(A) est dense dans E.

D'après le théorème de Hille-Yosida, pour toute condition initiale (y_0, y_1) dans D(A), le problème (I.1) admet une solution unique

$$(y,z) \in C([0,+\infty[\,; D(A)) \cap C^1([0,+\infty[\,; H^1(0,1) \times L^2(0,1)),$$

et d'aprés [5], on a

$$y \in C^2([0,+\infty[\,; L^2(0,1)) \cap C^1([0,+\infty[; H^1(0,1)) \cap C([0,+\infty[; H^2(0,1)).$$

Vu la densité de D(A) dans E, pour tout t fixé dans $[0,+\infty[$, l'application $(y_0, y_1) \to (y(t), z(t))$ s'étend en une contraction S(t) sur E telle que $(S(t))_{t\geq 0}$ soit fortement continue et on peut alors définir, pour toute condition initiale (y_0, y_1) dans E, la solution faible de (1.1) par la formule

$(y(t), z(t)) = S(t)(y_0, y_1)$, $t \geq 0$.

On a $(y, z) \in C([0, +\infty[; E)$; et d'après [5]

$y \in C([0, +\infty[; H^1(0,1)) \cap C^1([0, +\infty[\,; L^2(0,1))$. Le théorème I.1 est démontré.

II - Stabilisation asymptotique

Pour toute solution y de (I.1), on introduit la fonction

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (y_x^2 + y_t^2)\,dx + k_p\, y^2(0)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(K, \varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(0)}\left[\left(\int_0^1 y_x \varphi_p dx\right)^2 + \frac{1}{\omega_p^2}\left(\int_0^1 y_t\, \varphi_{p_x}\, dx\right)^2\right]$$

avec $(K, \varphi_p)_{L^2(0,1)} = \displaystyle\int_0^1 K(x)\, \varphi_p(x)\, dx$.

Théorème II.1. *Sous la condition* $-\varphi_p^2(0) < (K, \varphi_p)_{L^2(0,1)} \cdot \varphi_p(0),\ \forall p \geq 0$,

$E(t)$ est une fonction de Lyapounov et $E(t) \to 0$ lorsque $t \uparrow +\infty$, i.e. le système (I.1) est asymptotiquement stable.

Preuve.

On fera la preuve pour des données initiales (y_0, y_1) dans D(A). Grâce à la densité de D(A) dans E, elle s'étendra pour toute donnée initiale dans E.

Pour $t \geq 0$, on a $E(t) = \frac{1}{2} B\left(\binom{y}{y_t}, \binom{y}{y_t}\right)$, avec $\binom{y}{y_t}$ solution de (I.1).

Il est clair que $E(t) \geq 0$, $\forall\, t \geq 0$, et

$$\frac{dE(t)}{dt} = B\left(\binom{y}{y_t}, \frac{d}{dt}\binom{y}{y_t}\right) = -B(AY, Y), \text{ avec } Y = \binom{y}{y_t}.$$

L'opérateur linéaire A est monotone pour le produit scalaire définit par B, d'où $\frac{dE(t)}{dt} \leq 0$, et $E(t)$ est bien une fonction de Lyapounov.

Pour la stabilité asymptotique, on utilise le principe d'invariance de LASALLE [7].

La résolvante de A est compacte. D'après [3, Théorème 3], la trajectoire $O^+(y_0, y_1) = \{(y(t), y_t(t)), t \geq 0\}$ issue de $(y_0, y_1) \in D(A)$, est relativement compacte dans E.

Appliquons le principe d'invariance de LASALLE à l'ensemble ω-limite $\omega(y_0, y_1)$ de l'orbite $O^+(y_0, y_1)$. Le problème se réduit à montrer que $\omega(y_0, y_1) = \{(0,0)\}$.

On a, pour $(y_0, y_1) \in D(A)$, $\frac{dE}{dt} = -k_v\, y_t^2(0) \leq 0$, donc

$$E(t) - E(s) + \int_s^t k_v\, y_t^2(0,\sigma)\, d\sigma = 0.$$

Soit $(z_0, z_1) \in \omega(y_0, y_1) \subset D(A)$.

Si $(z(t), z_t(t))$ est la solution de (I.1) associée à (z_0, z_1), alors $k_v \int_s^t z_t^2(0,\sigma)\, d\sigma = 0$,

donc $z_t(0,t) = 0$, $\forall\, t \geq 0$.

L'ensemble $\omega(y_0, y_1)$ est inclus dans l'ensemble des conditions initiales dont la solution a une énergie constante, i.e. on aura

$$\text{(II.1)} \qquad \begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0\,,\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ z_x(0,t) = k_p\, z(0,t) - \displaystyle\int_0^1 K z_x\, dx \\ z_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

avec la condition supplémentaire

$z_t(0,t) = 0 \quad \forall\, t \geq 0$, i.e. $z(0,t) =$ constante.

Sur $L^2(0,1)$, on définit le produit scalaire suivant

$$(u, v)_{L^2_*} = \int_0^1 uv\, dx + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(K, \varphi_p)_{L^2}}{\varphi_p(0)\omega_p^2} (u, \varphi_{p_x})_{L^2} (v, \varphi_{p_x})_{L^2},$$

dont la norme associée est équivalente à la norme usuelle de $L^2(0,1)$.

On intègre l'équation (II.1)

$$\int_0^T (z_{tt} - z_{xx}, 1)_{L_*^2}\, dt = 0$$

$$\int_0^T \int_0^1 (z_{tt} - z_{xx})\, dx\, dt + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(K, \varphi_p)}{\varphi_p(0)\omega_p^2} \int_0^T \int_0^1 (z_{tt} - z_{xx})\, \varphi_{p_x}\, dx\, dt \int_0^1 \varphi_{p_x}\, dx =$$

$$\left[\int_0^1 z_t\, dx \right]_0^T - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(K, \varphi_p)}{\omega_p^2} \left[\int_0^1 \varphi_{p_x} z_t\, dx \right]_0^T$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} - \frac{(K, \varphi_p)}{\omega_p^2} \int_0^T [\varphi_{p_x} z_x]_0^1 dt + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(K, \varphi_p)}{\omega_p^2} \int_0^T \int_0^1 \varphi_{p_{xx}} z_x\, dx + \int_0^T [\, z_x\,]_0^1 dt$$

$$= \int_0^T - \sum_{p=0}^{+\infty} (K, \varphi_p)\, (\varphi_p, z_x)\, dt - \int_0^T z_x(0)\, dt = - k_p\, T\, z(0,T)\,.$$

Par ailleurs $z(0,T) =$ constante.

Noter que $\left[\int_0^1 z_t\, dx \right]_0^T - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(K, \varphi_p)}{\omega_p^2} \left[\int_0^1 \varphi_{p_x} z_t\, dx \right]_0^T$ est uniformément borné par rapport à T. On divise la relation ci-dessus par T, puis on fait tendre T vers $+\infty$, et on obtient $z(0,t) = 0,\ \forall\, t \geq 0$.

Le système (II.1) devient

$$\text{(II.2)} \qquad \begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0 \\ z_x(0,t) = - \int_0^1 K z_x\, dx \\ z_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

avec les équations supplémentaires

$$z(0,t) = z_t(0,t) = 0\,.$$

On considère le sytème

$$\text{(II.3)} \qquad \begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0 \\ z(0,t) = 0 \\ z_x(1,t) = 0\,. \end{cases}$$

Soient $\phi_p(x) = \sqrt{2}\, \sin(\omega_p x)$ où $\omega_p = (p + 1/2)\, \pi$, les fonctions propres normalisées du problème stationnaire associé à (II.3)

$$\text{(II.4)} \qquad \begin{cases} -\phi_{p_{xx}} = \omega_p^2 \phi_p \\ \phi_p(0) = 0 \\ \phi_{p_x}(1) = 0 \,. \end{cases}$$

Les $(\phi_p)_{p \geq 0}$ forment une base Hilbertienne de $L^2(0,1)$, et $z(x,t) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p(t)\, \phi_p(x)$.

On injecte cette expression de z dans (II.3) et on obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (a_{p_{tt}}(t) + \omega_p^2\, a_p(t))\, \phi_p(x) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad a_{p_{tt}}(t) + \omega_p^2\, a_p(t) = 0, \quad \forall\, p > 0,$$

ce qui donne $a_p(t) = a_p(0) \cos(\omega_p t) + \dfrac{a_{p_t}(0)}{\omega_p} \sin(\omega_p t)$, avec

$a_p(0) = (z_0, \phi_p)_{L^2}$, $a_{p_t}(0) = (z_1, \phi_p)_{L^2}$, et

$$z(x,t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[a_p(0) \cos(\omega_p t) + \frac{a_{p_t}(0)}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right] \phi_p(x) \,.$$

On montre facilement que les séries de terme généraux $(\omega_p^2\, a_p(0))_{p \geq 0}$ et $(\omega_p\, a_{p_t}(0))_{p \geq 0}$ sont de carrés sommables, d'où la convergence dans $H^1(0,1)$ de la série

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left[a_p(0) \cos(\omega_p t) + \frac{a_{p_t}(0)}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right] \phi_p(x) \,.$$

Comme $\varphi_{p_x}(0) = \sqrt{2}\, (p + 1/2)\, \pi \neq 0 \ \forall p \geq 0$, on a

$$z_x(0,t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[a_p(0) \cos(\omega_p t) + \frac{a_{p_t}(0)}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right] \phi_{p_x}(0).$$

D'autre part,

$$\int_0^1 K(x)\, z_x(x,t)\, dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[a_p(0) \cos(\omega_p t) + \frac{a_{p_t}(0)}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right] \int_0^1 K \phi_{p_x} dx \,.$$

Sous réserve que

$$\text{(II.5)} \qquad \phi_{p_x}(0) \neq - \int_0^1 K \phi_{p_x} dx \,, \ \forall\, p \geq 0,$$

la condition aux limites non encore prise en compte, qui s'écrit $z_x(0,t) = \displaystyle\int_0^1 -K z_x \, dx$,

implique, en utilisant un argument classique de fonctions presque-périodiques [1], que

$$a_p(0) = a_{pt}(0) = 0, \forall\ p \geq 0, \text{ et donc } (z_0, z_1) = 0.$$

D'où $\omega(y_0, y_1) = \{(0,0)\}$, et par suite $E(t) \underset{t \uparrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puisque l'énergie E(t) est équivalente à $\|(y, y_t)\|_E^2$, on obtient la stabilité asymptotique du système (I.1).

Montrons (II.5) pour terminer la preuve.

Supposons qu'il existe $p \geq 0$ tel que

$$\phi_{p_x}(0) = -\int_0^1 K(x)\ \phi_{p_x}(x)\ dx.$$

Puisque $K(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} (K, \varphi_q)\ \varphi_q(x)$, on aura $-2 = (K, \varphi_p)_{L^2(0,1)} \cdot \varphi_p(0)$,

ce qui est absurde, car $-2 < (K, \varphi_p)\ \varphi_p(0), \forall\ p \geq 0$. D'où le théorème II.1.

Remarque. La fonction $K(x) = \lambda \cos(\omega_p x)$ avec $-2 < \lambda$, vérifie les hypothèses du Théorème II.1.

III - Stabilisation uniforme

Il s'agit d'étudier la stabilisation uniforme du système

$$\text{(III.1)} \begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0\ ,\ 0 < x < 1,\ \ t > 0 \\ y_x(0,t) = k_p\ y(0,t) + k_v\ y_t(0,t) - \displaystyle\int_0^1 K y_x\, dx \\ y_x(1,t) = 0, \end{cases}$$

avec $(y_0, y_1) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1) = E$.

Théorème 3. *Sous la condition* $-\varphi_p^2(0) < \varphi_p(0) \displaystyle\int_0^1 K(x)\ \varphi_p(x)\ dx$ *,* $\forall\, p \geq 0$*, et* $\| K \|_{L^2(0,1)}$ *assez petit, le système (III.1) est exponentiellement uniformément stable.*

Preuve.

On pose $P(t) = 2\displaystyle\int_0^1 y_t(x,t)\ (x-1)\ y_x(x,t)\ dx + C_0\, y(0,t) \int_0^1 y_t(x,t)\ (1 + G(x))dx$,

C_0 étant une constante positive à fixer ultérieurement, et $G(x) = \displaystyle\int_0^x K(\sigma)\ d\sigma$.

On obtient facilement

$|P(t)| \leq C_1 E(t), \forall t \geq 0,$ avec $C_1 > 0.$

Si on arrive à montrer que

$P'(t) \leq - C_2 E(t) + C_3 y_t^2(0,t)$, avec $C_2, C_3 > 0,$

alors on aura la décroissance exponentielle de E(t).

Soit (y_0, y_1) dans D(A).

$$P'(t) = - \int_0^1 (y_x^2 + y_t^2)\, dx + y_x^2(0,t) + y_t^2(0,t) + C_0\, y_t(0,t) \int_0^1 y_t(x,t)\,(1 + G(x))\, dx$$

$$+ C_0\, y(0,t)\, [- k_p\, y(0,t) - k_v\, y_t(0,t)] .$$

On a

$$y_x^2(0,t) = k_p^2\, y^2(0,t) + k_v^2\, y_t^2(0,t) + \left(\int_0^1 K y_x\, dx \right)^2 - 2\, k_v\, y_t(0,t) \int_0^1 K y_x\, dx$$

$$+ 2\, k_p\, k_v\, y(0,t)\, y_t(0,t) + 2\, k_p\, y(0,t) \int_0^1 K y_x\, dx.$$

On utilise les majorations suivantes

i) $2\, k_p\, k_v\, y(0,t)\, y_t(0,t) \leq k_p^2\, y^2(0,t) + k_v^2\, y_t^2(0,t),$

ii) $- 2\, k_p\, y(0,t) \displaystyle\int_0^1 K y_x\, dx \leq \frac{k_p^2\, \|K\|_{L^2}^2}{\varepsilon_1}\, y^2(0,t) + \varepsilon_1 \int_0^1 y_x^2\, dx,$

iii) $- 2\, k_v\, y_t(0,t) \displaystyle\int_0^1 K y_x\, dx \leq \frac{k_v^2\, \|K\|_{L^2}^2}{\varepsilon_2}\, y_t^2(0,t) + \varepsilon_2 \int_0^1 y_x^2\, dx,$

iv) $C_0\, y_t(0,t) \displaystyle\int_0^1 y_t(x,t)(1 + G(x))\, dx \leq \frac{C_0^2}{2\varepsilon_3}\, \|1 + G\|_{L^2}^2\, y_t^2(0,t) + \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^1 y_x^2\, dx,$ et

v) $- k_v\, C_0\, y(0,t)\, y_t(0,t) \leq \dfrac{C_0^2\, k_v^2}{2}\, y_t^2(0,t) + \dfrac{y^2(0,t)}{2}$,

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont strictement positifs .

En injectant ces majorations dans l'expression de P'(t) on obtient

$$P'(t) \leq -\left[\left(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\|K\|^2_{L^2}\right)\right]\int_0^1 y_x^2\,dx-\left[1-\frac{\varepsilon_3}{2}\right]\int_0^1 y_t^2\,dx$$

$$+\,y^2(0,t)\left[-k_pC_0+k_p^2\left(1+\frac{\|K\|^2_{L^2}}{\varepsilon_1}\right)+\frac{1}{2}\right]$$

$$+\,y_t^2(0,t)\left[1+k_v^2\left(1+\frac{\|K\|^2_{L^2}}{\varepsilon_2}\right)+\frac{C_0^2}{2\varepsilon_3}\|1+G\|^2_{L^2}+\frac{C_0^2k_v^2}{2}\right].$$

On pose $C_3 = 1+k_v^2\left(1+\dfrac{\|K\|^2_{L^2}}{\varepsilon_2}\right)+\dfrac{C_0^2}{2\varepsilon_3}\|1+G\|^2_{L^2}+\dfrac{C_0^2k_v^2}{2}$,

et on impose les conditions

$$\|K\|^2_{L^2} < 1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\ ,\quad 0<\varepsilon_3<2\,.$$

Soit $a = \min\left(\left(1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-\|K\|^2_{L^2}\right),\ \left(1-\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\right)$.

On a $P'(t) \leq -2\,a\,E_0(t) + C_3\,y_t^2(0,t)$

$$+y^2(0,t)\left[-k_pC_0+k_p^2\left(1+a+\frac{\|K\|^2_{L^2}}{\varepsilon_1}\right)+\frac{C_0^2k_v^2}{2}\right],$$

avec $E_0(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (y_x^2+y_t^2)\,dx+\dfrac{k_p}{2}\,y^2(0,t)$.

$E(t)$ est équivalente à $E_0(t)$, $\forall\, t \geq 0$.
On choisit $C_0 > 0$ qui annulera le coefficient en $y^2(0, t)$.

Alors $\quad P'(t) \leq -C_2\,E(t) + C_3\,y_t^2(0, t)$.

D'où la décroissance exponentielle uniforme de E(t), pour toute donnée initiale dans D(A). On en déduit la décroissance exponentielle uniforme pour toute donnée initiale dans E.

<u>Références</u>

[1] F. CONRAD, M. PIERRE, Stabilization of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback, Rapport de Recherche INRIA n° 1235 (1990).

[2] F. CONRAD, B. RAO, Decay of solutions of wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, Rapport de Recherche INRIA n° 1381 (1991).

[3] C. M. DAFERMOS, M. SLEMROD, Asymptotic behaviour of nonlinear contraction semi-groups, J. Funct. Anal. 13 (1973) pp. 97-106.

[4] J. S. GIBSON, A note on stabilization of infinite dimensional linear oscillators by compact linear feedback, SIAM J. Control and Optimization 18, 3 (1980).

[5] A. HARAUX, *Semilinear hyperpolic problems in bounded domains*, Mathematical Report, Vol.3, J. Dieudonné, ed. Harwood Academic Publishers, Gordon and Breach, New York (1987).

[6] S. ICART, J. LEBLOND et C. SAMSON, Some results on feedback stabilization of a one-link flexible arm, Rapport de Recherche INRIA n° 1682, (1992).

[7] A. LASALLE, S. LEFSCHETZ, *Stability by Lyapounov's direct method*, Academic Press (1961).

[8] R. TRIGGIANI, Lack of uniform stabilization for noncontractive semi-groups under compact perturbation, Proceedings of the American Mathematical Society 105, 2 (1989) pp. 375-383.

[9] E. ZUAZUA, Some remarks on the boundary stabilizability of the wave equation, in Control of Boundaries and Stabilization, J. Simon ed., Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag (1990).

ISSN 0249-6399